

Option B/L

Exercice 4.01.

Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On pose $q = 1 - (\alpha + \beta)$.

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, montrer que $A^m = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha q^m & \alpha(1 - q^m) \\ \beta(1 - q^m) & \alpha + \beta q^m \end{pmatrix}$.

Un bit de données a_1 prenant une valeur aléatoire appartenant à $\{0, 1\}$, avec une probabilité non nulle, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose qu'à chaque relais, l'élément $x \in \{0, 1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres.

On note X_0 la variable aléatoire certaine égale à a_1 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui représente la valeur du bit à l'issue de la n -ième transmission.

3. a) Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer $\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix}$ en fonction de A et $\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}$.

b) En déduire la loi de X_n en fonction de celle de X_0 .

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_{[X_0=0]}(X_n = 0)$ et $P_{[X_0=1]}(X_n = 1)$.

5. Montrer que : $P(X_n = X_0) > 0$.

Solution :

1. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, le réel 1 est valeur propre associé au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si A est diagonalisable et semblable à une matrice $\text{diag}(1, \mu)$, alors on a $1 + \mu = \text{tr}(A) = 2 - \alpha - \beta = 1 + q$, donc $\mu = q$. Réciproquement le calcul donne le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à la valeur propre $q = 1 - \alpha - \beta$ (différente de 1 car $\alpha + \beta > 0$). Ainsi A , possédant deux valeurs propres distinctes, est bien diagonalisable.

2. Par récurrence sur $m \geq 0$, ou en diagonalisant A .

3. a) La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_n = 0), (X_n = 1))$ donne :

$$\forall i \in \{0, 1\} \quad P(X_{n+1} = i) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = i)P(X_n = 0) + P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i)P(X_n = 1),$$

soit, matriciellement :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

b) On en déduit par une récurrence immédiate que : $\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix} = {}^t(A^n) \begin{pmatrix} P(X_0 = 0) \\ P(X_0 = 1) \end{pmatrix}$, soit :

$$\begin{cases} P(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha q^n}{\alpha + \beta} P(X_0 = 0) + \frac{\beta(1 - q^n)}{\alpha + \beta} P(X_0 = 1) \\ P(X_n = 1) = \frac{\alpha(1 - q^n)}{\alpha + \beta} P(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta q^n}{\alpha + \beta} P(X_0 = 1) \end{cases}$$

4. Le raisonnement précédent peut aussi être effectué en remplaçant la probabilité P par la probabilité conditionnelle $P_{[X_0=0]}$.

Pour $n \geq 1$, comme les relais sont indépendants, on a :

$$\begin{cases} P_{[X_0=0] \cap [X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = 1 - \alpha \\ P_{[X_0=0] \cap [X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \beta \end{cases}$$

et cela reste vrai de manière évidente pour $n = 0$. Donc :

$$\begin{pmatrix} P_{[X_0=0]}(X_{n+1} = 0) \\ P_{[X_0=0]}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} P_{[X_0=0]}(X_n = 0) \\ P_{[X_0=0]}(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Comme à la question précédente on en déduit :

$$P_{[X_0=0]}(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha q^n}{\alpha + \beta} P_{[X_0=0]}(X_0 = 0) + \frac{\beta(1 - q^n)}{\alpha + \beta} P_{[X_0=0]}(X_0 = 1) = \frac{\beta + \alpha q^n}{\alpha + \beta}.$$

Et de même, on obtient : $P_{[X_0=1]}(X_n = 1) = \frac{\alpha + \beta q^n}{\alpha + \beta}.$

5. On a

$$\begin{aligned} P(X_n = X_0) &= P_{[X_0=0]}(X_n = 0)P(X_0 = 0) + P_{[X_0=1]}(X_n = 1)P(X_0 = 1) \quad (\text{probas totales}) \\ &= \frac{\beta + \alpha q^n}{\alpha + \beta} P(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta q^n}{\alpha + \beta} P(X_0 = 1) \quad (\text{question précédente}) \\ &= \phi\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right) P(X_0 = 0) + \phi\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) P(X_0 = 1). \end{aligned}$$

avec $\phi(x) = x + (1-x)q^n$.

Si l'on note $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ et $p = P(X_0 = 0)$, alors

$$P(X_n = X_0) = g(\lambda) = \phi(\lambda)p + \phi(1-\lambda)(1-p) = ((1-q^n)\lambda + q^n)p + ((1-q^n)(1-\lambda) + q^n)(1-p)$$

La fonction ϕ est affine sur $[0, 1]$, ainsi que la fonction g .

Une étude rapide montre que $g'(\lambda) = (1-q^n)(2p-1)$. Ainsi

- si $p > 1/2$, la fonction g est croissante et

$$g(\lambda) > g(0) = q^n p + (1-q^n)(1-p) > 0$$

- si $p < 1/2$, la fonction g est décroissante et

$$g(\lambda) > g(1) = p + q^n(1-p) > 0$$

- si $p = 1/2$, la fonction g est constante égale à $\frac{1+q^n}{2}$.

Exercice 4.02.

On considère un entier n supérieur ou égal à 2 et la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice dont les termes diagonaux sont $1, 2, \dots, n$ et dont tous les autres termes valent 1.

1. Montrer que le réel λ est valeur propre de A si et seulement si λ vérifie l'équation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$$

2. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, \dots, n-1\}$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - k}$$

En utilisant la fonction f_n , montrer que A admet n valeurs propres réelles distinctes. En déduire que la matrice A est diagonalisable.

3. On note λ_n la plus grande valeur propre de A .

a) Établir, pour tout réel y positif, l'inégalité suivante : $\sum_{j=1}^n \frac{1}{y+j} \leq \int_0^{n-1} \frac{1}{t+y} dt$.

b) En déduire que $f_n\left(n + \frac{n}{e-1}\right) \leq 1$.

c) Montrer de même que $f_n\left(n-1 + \frac{n}{e-1}\right) \geq 1$.

4. En déduire que l'on a : $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{ne}{e-1}$.

Solution :

1. L'équation $AX = \lambda X$ est équivalente au système $(\star) \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i + k x_k = \lambda x_k$, pour $k \in$

$\llbracket 1, n \rrbracket$, qui est équivalent au système : $(\star\star) S = \sum_{i=1}^n x_i = (\lambda - k + 1)x_k$, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $\lambda = k - 1$, l'équation contenant le terme $(\lambda - (k - 1))x_k$ donne $S = 0$ et donc $x_i = 0$, pour $i \neq k$.

Mais comme $S = 0$, on a $x_k = 0$. Ainsi, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda \neq k - 1$.

On peut donc diviser par $\lambda - (k - 1)$. Il vient : $x_k = \frac{S}{\lambda - k + 1}$, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On somme toutes ces équations et on obtient : $S \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = S$.

Comme on vu que S était nécessairement non nul, on obtient bien : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$.

Réciproquement, on sait que l'équation $AX = \lambda X$ est équivalente au système d'équations (\star) . Ce système est équivalent au système $(\star\star)$.

L'équation $S \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = S$ étant vérifiée, puisque $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$, le système $(\star\star)$ est un système de $n - 1$ équations à n inconnues ; il admet une solution non triviale.

2. Sur l'intervalle $]k, k + 1[$, la fonction f_n est dérivable et de dérivée donnée par : $f'_n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x - k)^2}$.

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur cet intervalle et à valeurs dans $] -\infty, +\infty[$.

On applique alors le théorème de la bijection à f_n sur l'intervalle $]k, k + 1[$ et donc il existe bien un unique réel x_k de l'intervalle $]k, k + 1[$ tel que $f_n(x_k) = 1$.

Il en est de même sur $]n-1, +\infty[$ où la fonction f_n décroît de $+\infty$ vers 0. Le théorème de la bijection donne l'existence de x_n .

La fonction f_n admet n solutions distinctes situées dans \mathbb{R} . La matrice A possède donc n valeurs propres distinctes, ce qui montre qu'elle est diagonalisable.

3. a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{y+t}$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ . La méthode de comparaison série/intégrale donne le résultat attendu.

b) $f_n(n+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+y-k}$. Le changement d'indice $j = n-k$ donne :

$$f_n(n+y) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{y+j}$$

D'après la question précédente, on a donc : $f_n(n+y) \leq \int_0^{n-1} \frac{1}{t+y} dt = \ln \left(1 + \frac{n-1}{y} \right)$.

On conclut en prenant $y = \frac{n}{e-1}$:

$$f_n \left(n + \frac{n}{e-1} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{n-1}{n}(e-1) \right) \leq \ln(e) = 1$$

c) On utilise la même stratégie :

$$f_n(n-1+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-1+y-k} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{y+j} \geq \int_0^n \frac{1}{y+t} dt$$

On obtient : $f_n(n-1+y) \geq \ln \left(1 + \frac{n}{y} \right)$.

4. En posant toujours $y = \frac{n}{e-1}$, il vient : $f_n \left(n + \frac{n}{e-1} \right) \leq 1 \leq f_n \left(n-1 + \frac{n}{e-1} \right)$. Or la fonction f_n étant décroissante, il vient : $n-1 + \frac{n}{e-1} \leq \lambda_n \leq n + \frac{n}{e-1}$, ce qui donne l'équivalent $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{ne}{e-1}$.

Exercice 4.03.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que f_n est une densité de probabilité.

On considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n admet la fonction f_n comme densité.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance de X_n .

On admet sans démonstration que la variance de X_n est égale à $\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}$.

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet-elle d'affirmer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = 0?$$

3. a) Pour tout n de \mathbb{N}^* , déterminer la fonction de répartition F_n de X_n .

b) Pour tout x réel, on pose : $F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

4. Soit ε un réel vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) \neq 0$$

Solution :

1. La fonction f_n est positive, elle est continue (même en 0 et 1) et on a : $\int_0^1 (1 - \cos(2n\pi x)) dx = 1$ (sans problème de convergence).

2. a) La fonction f_n étant continue bornée et nulle hors de $[0, 1]$, X_n admet des moments à tout ordre.

Par intégration par parties (les fonctions en jeu étant bien de classe C^1 sur $[0, 1]$), on a :

$$E(X_n) = \int_0^1 t(1 - \cos(2n\pi t)) dt = \frac{1}{2} - \left[t \left(\frac{\sin(2n\pi t)}{2n\pi} \right) \right]_0^1 + \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \sin(2n\pi t) dt = \frac{1}{2}$$

Un calcul analogue donne $E(X_n^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}$ et $V(X_n) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}$

b) L'inégalité de Tchebicheff ne permettra pas de conclure, car bien que $E(X_n) = 1/2$, la suite des variances ne tend pas vers zéro.

3. a) Une intégration quasi évidente donne

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Comme $\left| \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \right| \leq \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi la suite (F_n) tend vers la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

4. Soit $0 < \varepsilon < 1/2$. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right) = P\left(X_n - \frac{1}{2} > \varepsilon\right) + P\left(X_n - \frac{1}{2} < -\varepsilon\right) = 1 - F_n(1/2 + \varepsilon) + F_n(1/2 - \varepsilon)$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - F_n(1/2 + \varepsilon) + F_n(1/2 - \varepsilon) = 1 - 2\varepsilon > 0$$

Exercice 4.04.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Soit n un entier de \mathbb{N}^* . Soit U_n une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(U_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$

On admet que l'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire.

Pour toute variable aléatoire T , on appelle *moment factoriel d'ordre k* , pour $k \in \mathbb{N}$, les réels suivants :

$$m_k(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ E(T(T-1) \cdots (T-k+1)) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour $k \geq n+1$, on a $m_k(U_n) = 0$.
2. Montrer que pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $m_k(U_n) = 1$.
3. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k(Z)$.
4. On définit une suite $(Q_j)_{j \geq 0}$ de polynômes par :

$$Q_j(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ X(X-1) \cdots (X-j+1) & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
- b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $E(U_n^k) = E(Z^k)$.

Solution :

1. a) La variable aléatoire U_n étant à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a $U_n(U_n - 1) \cdots (U_n - n) = 0$ et $m_k(U_n) = 0$ si $k \geq n+1$.

2. La relation est vérifiée pour $k = 0$ par définition de $m_0(T)$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} m_k(U_n) &= \sum_{i=k}^n i(i-1) \cdots (i-k+1) \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{i=k}^n \frac{1}{(i-k)!} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(-1)^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{n-k-i} \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{i=0}^{n-k} P(U_{n-k} = i) = 1 \end{aligned}$$

3. Si Z suit la loi de Poisson de paramètre 1

$$m_k(Z) = e^{-1} \sum_{i=k}^{+\infty} i(i-1) \cdots (i-k+1) \frac{1}{i!} = e^{-1} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{(i-k)!} = e^{-1} \times e = 1$$

4. a) La suite (Q_n) est une suite de polynômes échelonnée en degrés et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et une base.

b) Par la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe $a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k}$ réels tels que

$$X^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} Q_j$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(U_n^k) = \sum_{j=0}^k a_{j,k} m_k(X_n) = \sum_{j=0}^k a_{j,k} = \sum_{j=0}^k a_{j,k} m_k(Z) = E(Z^k)$$

Exercice 4.05.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définie par la densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on note Φ_n la fonction de répartition de $\frac{n}{M_n}$.

1. Établir que pour tout $x > 0$, la relation : $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\Phi_n(0)$.

b) En déduire, pour tout $t \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(t)$. On note cette limite $\Phi(t)$.

3. Pour tout réel $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P\left(\left[\frac{n}{M_n} \leq t\right] \cap [M_n > 0]\right)$.

4. Déterminer, pour tout réel $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(t)$. On note cette limite $\Phi(t)$.
5. Montrer que la fonction Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Solution :

1. La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} , et la fonction inverse sur \mathbb{R}^* .

Ainsi, on dérive sur \mathbb{R}_+^* , la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante. En l'évaluant en 1, on en déduit le résultat souhaité.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par indépendance des X_i :

$$\begin{aligned} \phi_n(0) &= P(nM_n^{-1} \leq 0) = P(M_n \leq 0) = P(X_1 \leq 0, \dots, X_n \leq 0) \\ &= \left(\int_{-\infty}^0 f(t) dt \right)^n = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

- b) Soit $t \leq 0$. Par croissance de ϕ_n , on a $0 \leq \phi_n(t) \leq \phi_n(0)$. Ainsi, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t) = 0$.

3. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a par indépendance des X_i ,

$$\begin{aligned} P(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) &= P\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) = 1 - P\left(M_n \leq \frac{n}{t}\right) \\ &= 1 - P\left(X_1 \leq \frac{n}{t}\right)^n \\ &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{n/t} f(t) dt \right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{\arctan\left(\frac{n}{t}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right)^n \end{aligned}$$

4. Soit $t > 0$. On a par la question précédente et la question 1,

$$P(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) = 1 - \left(1 - \frac{\arctan\left(\frac{t}{n}\right)}{\pi} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned} P(nM_n^{-1} \leq t) &= P(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) + P(nM_n^{-1} \leq t, M_n \leq 0) \\ &= P(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) + P(M_n \leq 0) \\ &= P(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) + \phi_n(0) \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right) = \phi(t)$.

5. On déduit des questions précédentes que la suite $(\phi_n(t))$ converge vers la fonction $\phi(t)$ qui est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

Exercice 4.06.

1. Montrer que $\int_0^1 (x^3 + t^3)^{-1/3} dt$ est convergente pour $x > 0$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par

$$f(x) = \int_0^1 (x^3 + t^3)^{-1/3} dt$$

2. Montrer que $f(x) = \int_0^{1/x} (1 + t^3)^{-1/3} dt$.

3. a) Étudier les variations de f sur \mathbb{R}^{+*} .

b) Étudier les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

4. Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Pour tout x strictement positif, $t \mapsto (x^3 + t^3)^{-1/3}$ est continue sur $[0, 1]$. Pour $x = 0$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge.

Ainsi f est-elle bien définie sur \mathbb{R}^{+*} .

2. On écrit $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 (1 + (t/x)^3)^{-1/3} dt$ et le changement de variable linéaire $t = xu$ donne

$$f(x) = \int_0^{1/x} (1 + u^3)^{-1/3} du$$

3. a) Pour $x > 0$, le théorème fondamental du calcul intégral permet d'affirmer que f est dérivable et que

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{-1/3} = \frac{-1}{x(1 + x^3)^{1/3}}$$

La fonction f est donc décroissante sur \mathbb{R}^{+*} .

b) • lorsque x tend vers $+\infty$, comme $h(t) = \frac{1}{(1+t^3)^{1/3}} > 0$, on peut écrire :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{1/x} du = \frac{1}{x}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

• lorsque x tend vers 0^+ , comme $h(t) = \frac{1}{(1+t^3)^{1/3}} > 0$ et au voisinage de $+\infty$, $h(t) \sim \frac{1}{t}$, dont l'intégrale diverge sur $[1, +\infty]$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. On détermine d'abord l'équivalent de manière intuitive.

Au voisinage de 0, $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$ et donc $f(x)$ doit être équivalent à $\frac{1}{x}$. De manière rigoureuse

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \int_0^{1/x} |h(t) - 1| dt$$

Or, au voisinage de 0, $h(t) - 1 = (1+t^3)^{-1/3} - 1 = -\frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Ainsi pour t au voisinage de 0

$$|h(t) - 1| \leq Ct^3$$

Pour x assez grand

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \int_0^{1/x} Ct^3 dt = \frac{M}{x^4} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Finalement, au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x}$

Exercice 4.07.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$. On rappelle qu'un endomorphisme f non nul de E est nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

On appelle alors indice de nilpotence de f le plus petit entier k vérifiant cette propriété.

Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p .

1. L'endomorphisme f est-il inversible ? Est-il diagonalisable ?

2. Montrer qu'il existe un élément $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre. En déduire que $p \leq n$.

Soit g un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence q .

3. a) Montrer que si f et g commutent, alors $f+g$ est nilpotent. Donner un majorant de l'indice de nilpotence de $f+g$.

b) Ce résultat reste-t-il valide si f et g ne commutent pas ?

4. a) Montrer que si f et g commutent, alors $f \circ g$ est nilpotent. Donner un majorant de l'indice de nilpotence de $f \circ g$.

b) Ce résultat reste-t-il valide si f et g ne commutent pas ?

Solution :

1. Comme $f^p = 0$. Si f^{-1} existe, en composant par cet inverse p fois, on obtient $I = 0$. La seule valeur propre de f est 0, puisque s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors $0 = f^p(x) = \lambda^p x$ et $\lambda = 0$. Si f est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle, en contradiction avec $f \neq 0$.

2. Comme $f^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. La famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre car en composant par f^{p-1}

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 f^{p-1}(x) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

En recommençant ce processus, on obtient le résultat demandé. Ceci montre que p qui est la cardinal de cette famille est inférieur ou égal à n .

3. a) Les endomorphismes f et g commutant, le binôme de Newton donne

$$(f + g)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^k g^{m-k}$$

En prenant $m = p + q$, il vient

$$(f + g)^{p+q} = \sum_{k=0}^p \binom{p+q}{k} f^k g^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} f^k g^{p+q-k} = 0$$

car dans la première somme $p + q - k \geq p$ et dans la seconde somme $k \geq p$.

b) Donnons un contre exemple. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on pose

$$f(e_1) = e_2, f(e_i) = 0, \forall i \neq 1, \quad \text{et} \quad g(e_2) = e_1, g(e_i) = 0, \forall i \neq 2$$

Alors, on vérifie que $f^2 = g^2 = 0$ et par exemple $(f + g)(e_1 + e_2) = e_2 + e_1$. Ainsi 1 est valeur propre de $f + g$ qui ne peut être nilpotent.

4. a) Par récurrence immédiate, comme $f \circ g = g \circ f$, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)^k = f^k \circ g^k$. En posant $m = \max(p, q)$, on obtient $(f \circ g)^m = 0$.

b) Le même contre exemple marche également ici : $(f \circ g)(e_2) = e_2$. Le vecteur e_2 est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Exercice 4.08.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue sans remise le tirage une à une de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1 Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

2. On rappelle que pour tout entier naturel m , on a :

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

et on admet sans démonstration que la variance de Y est égale à $\frac{n(n+3)}{18}$.

Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. On admet que $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$.

Déterminer un équivalent de $E(XY)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La variable aléatoire X prend les valeurs $\{1, 2, 3\}$. On note N_i l'événement « on a tiré une boule noire au i -ième tirage » et B_i l'événement « on a tiré une boule blanche au i -ième tirage ».

- $P(X = 1) = \frac{n}{n+2}$;
- $P(X = 2) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2/N_1) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$
- $P(X = 3) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(N_1)P(N_2/N_1)P(B_3/N_1 \cap N_2) = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

Un calcul rapide donne $E(X) = \frac{n+3}{n+1}$, ainsi que $V(X) = \frac{2n(n+3)}{(n+2)(n+1)^2}$

2. La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n+1\}$.

On note A_i l'événement « on a tiré une boule numérotée 1 au i -ième tirage » et C_i l'événement « on a tiré une boule non numérotée 1 au i -ième tirage ».

- $P(Y = 1) = \frac{2}{n+2}$.
- En utilisant la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(C_1 \cap C_2 \dots C_{k-1} \cap A_k) \\ &= P(C_1)P(C_2/C_1) \dots P(C_{k-1}/(C_1 \cap \dots \cap C_{k-2}))P(A_k/(C_1 \cap \dots \cap C_{k-1})) \\ &= \frac{n}{n+2} \frac{n-1}{n+1} \dots \frac{n-k+2}{n+2-k+2} \frac{2}{n+2-k+1} \\ &= \frac{2(n!)(n+2-k)!}{(n+2)!(n-k+1)!} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Un calcul un peu plus long donne :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n+3}{3}$$

et

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{(n+2)(n+3)}{6} - \frac{(n+3)^2}{9} = \frac{n(n+3)}{18}$$

3. On a

$$P(X=Y=1) = P((X=1) \cap (Y=1)) = \frac{1}{n+2} \text{ et } P((X=1)P(Y=1)) = \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+2}$$

Ces deux expressions ne sont pas égales, sauf pour $n=2$.

Si $n=2$, $Y(\Omega) = X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $P(X=3, Y=3) = 0 \neq P(X=3)P(Y=3)$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

4. On sait que $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Donc $|E(XY) - E(X)E(Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

Les calculs précédents montrent que $E(X)E(Y) \sim \frac{n}{3}$ tandis que $\sqrt{V(X)V(Y)} \sim \sqrt{\frac{n}{9}} = o(E(X)E(Y))$.

Ainsi, $E(XY) \sim E(X)E(Y) \sim \frac{n}{3}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.09.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. A toute fonction f continue sur \mathbb{R}_+ , on associe, sous réserve d'existence, la fonction $T_n(f)$ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \quad T_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-ntx} dt$$

1. a) Soit $f_a : t \rightarrow e^{-at}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel $a > 0$, la fonction $T_n(f_a)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

Expliciter son expression.

b) Soit $f_k : t \rightarrow t^k$, où $k \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de l'entier k la fonction $T_n(f_k)$ est-elle définie ?

Dans ces cas, l'expliciter.

2. On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée sur \mathbb{R}_+ .

a) Montrer que la fonction $T_n(f)$ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (T_n(f)(x))$.

3. On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée, de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et que sa dérivée f' est bornée sur \mathbb{R}_+ . Montrer que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x T_n(f)(x) \right) = \frac{f(0)}{n}.$$

Solution :

1. a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(nx+a)t} dt$ converge si et seulement si $nx+a > 0$. Ainsi pour toute valeur de $a > 0$, la fonction $T_n(f_a)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* avec $T_n(f_a)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+nx)t} dt = \frac{1}{a+nx}$.

b) Soit $x > 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-nxt} dt$ converge pour toute valeur de k car la fonction $t \rightarrow t^k e^{-nxt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. De plus, le changement de variable affine $u = nxt$ donne :

$$T_n(f_k)(x) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nxt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{nx}\right)^k e^{-u} \frac{du}{nx} = \frac{1}{(nx)^{k+1}} \Gamma(k+1) = \frac{k!}{(nx)^{k+1}}.$$

2. a) Soit M un réel tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leq M$. Alors :

$$\forall x > 0, \quad |f(t)e^{-nxt}| \leq M e^{-nxt} \quad \text{et} \quad e^{-nxt} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Par critères successifs de négligeabilité et de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nxt} dt$ converge absolument, donc converge.

b) Pour tout $x > 0$, $|T_n(f)(x)| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-nxt} dt = \frac{M}{nx}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(T_n(f)(x) \right) = 0$.

3. Soit $A > 0$. Les fonctions f et $t \rightarrow e^{-nxt}$ étant de classe C^1 sur $[0, A]$, on peut faire une intégration par parties :

$$\int_0^A f(t) e^{-nxt} dt = \left[-f(t) \frac{e^{-nxt}}{nx} \right]_0^A + \frac{1}{nx} \int_0^A f'(t) e^{-nxt} dt$$

Comme f est bornée sur \mathbb{R}_+ , en faisant tendre A vers $+\infty$, il reste :

$$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-nxt} dt = \frac{f(0)}{nx} + \frac{1}{nx} \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-nxt} dt \quad \Rightarrow \quad x T_n(f)(x) = \frac{f(0)}{n} + \frac{1}{n} T_n(f')(x).$$

On fait alors tendre x vers $+\infty$. En appliquant la question précédente avec la fonction f' qui est elle aussi bornée sur \mathbb{R}_+ , on trouve la formule demandée.

Exercice 4.10.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et prenant ses valeurs dans \mathbb{N}^* .

On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* , $a_n = P(X = n)$.

1. Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, la série de terme général $a_n x^n$ est convergente.

On désigne alors par f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

On suppose que cette fonction est dérivable en 1.

2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ est croissante sur $[0, 1[$ et que pour tout x de $[0, 1]$, on a : $0 \leq g(x) \leq f'(1)$.

3. Montrer que la série de terme général na_n est convergente et que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq g(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$$

4. En déduire que X admet une espérance et la déterminer en fonction de f .

Solution :

1. Soit $x \in [0, 1]$. On a : $0 \leq a_n x^n \leq a_n$. Or a_n est le terme général d'une série convergente dont la somme est égale à 1. Donc la série $\sum a_n x^n$ est convergente.

2. Soit $x \in [0, 1[$. Il vient

$$g(x) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \right) = \frac{1}{1 - x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 - x^n) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

Soient $0 \leq x \leq y < 1$. Alors

$$g(x) - g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} y^k \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} (x^k - y^k) \right)$$

La fonction g est croissante sur $[0, 1[$ et g admet une limite à gauche en 1.

Donc, $\forall x \in [0, 1[$, $g(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ soit $g(x) \leq f'(1)$ et on a évidemment $0 \leq g(x) \leq f'(1)$.

3. Soit $N \geq 1$. Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a $a_n \geq 0$. Donc, pour tout x de $[0, 1]$,

$$0 \leq \sum_{n=1}^N \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq f'(1)$$

Ainsi

$$\forall x \in [0, 1[, 0 \leq \sum_{n=1}^N \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) \leq f'(1)$$

Or, $x \mapsto \sum_{n=1}^N (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k)$ est un polynôme donc est continue en 1. Donc, en faisant tendre x vers 1, on a :

$$0 \leq \sum_{n=1}^N na_n \leq f'(1)$$

Donc, pour tout $N \geq 1$, $0 \leq \sum_{n=1}^N (na_n) \leq f'(1)$. La suite des sommes partielles de terme général na_n positif est croissante et majorée, donc convergente. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ converge et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$$

en faisant tendre N vers $+\infty$.

Soit $x \in [0, 1[$. On a $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k)$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

On obtient par comparaison des sommes de séries convergentes

$$0 \leq u_n(x) \leq na_n \text{ et } 0 \leq g(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq f'(1)$$

4 . La série $\sum na_n$ converge donc X admet une espérance et : $\forall x \in [0, 1[, 0 \leq g(x) \leq E(X) \leq f'(1)$.

En faisant tendre x vers 1, on obtient $E(X) = f'(1)$.

Exercice 4.11.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Une urne contient exclusivement des boules rouges et noires indiscernables au toucher.

La proportion de boules rouges est $p \in]0, 1[$. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise.

On commence par effectuer des tirages de boules jusqu'à obtention d'une boule rouge ; on note N le nombre de tirages qui ont été nécessaires pour obtenir cette première boule rouge.

On effectue ensuite N tirages successifs et on s'intéresse à X qui représente le nombre de boules rouges obtenues lors de ces N tirages.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire N ?
2. Pour un entier $n \geq 1$, quelle est la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$?
3. Déterminer la loi du couple (N, X) .
4. Déterminer la loi de X . On pourra utiliser sans démonstration l'égalité :

$$(*) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+k}{k} x^m$$

5. Soit un réel $\lambda \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires U et V indépendantes, telles que U suit une loi de Bernoulli de paramètre λ et V suit une loi géométrique de paramètre λ . Déterminer la loi de la variable aléatoire UV .

6. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une suivant une loi de Bernoulli et l'autre une loi géométrique.

7. Exprimer $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de λ .

Solution :

1. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire N compte le nombre de tirages pour obtenir la première boule rouge. Les tirages sont identiques et indépendants, N suit donc une loi géométrique de paramètre p : pour $n \geq 1$, $P[N = n] = (1-p)^{n-1}p$.

2. On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Sachant que $[N = n]$, on a n répétitions indépendantes du même schéma de Bernoulli de probabilité de succès p d'où une loi binomiale :

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P[X = k | N = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et pour toute autre valeur de k , $P[X = k | N = n] = 0$.

3. La loi du couple (N, X) est donnée, pour $n \geq 1$, par :

$$P[(N, X) = (n, k)] = \begin{cases} P_{N=n}(X = k)P[N = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. On utilise le système complet d'événements $([N = n])_{n \geq 1}$: pour $k \geq 1$, nécessaire pour initialiser n ,

$$\begin{aligned} P[X = k] &= \sum_{n=1}^{+\infty} P[X = k, N = n] = \sum_{n=k}^{+\infty} P[X = k, N = n], \\ &= p^{k+1} (1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-2k} \\ &= p^{k+1} (1-p)^{k-1} \frac{1}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = p^{k+1} (1-p)^{k-1} \frac{1}{p^{k+1} (2-p)^{k+1}} \\ &= \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \end{aligned}$$

Pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} P[X = 0] &= \sum_{n=1}^{+\infty} P[X = 0, N = n] = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^1 (1-p)^{2n-1} \\ &= p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p} \end{aligned}$$

5. La loi de la variable aléatoire UV est donnée par $UV(\Omega) = \mathbb{N}$, et, pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned} P[UV = k] &= P[UV = k, U = 0] + P[UV = k, U = 1] = P[V = k, U = 1] \\ &= P[V = k]P[U = 1] = (1 - \lambda)^{k-1}\lambda^2 \end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $P[UV = 0] = P[U = 0] = 1 - \lambda$ car $V > 0$.

6. On choisit λ tel que : $1 - \lambda = \frac{1-p}{2-p}$. On a alors : $\lambda = \frac{1}{2-p}$ et $0 < p < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \lambda < 1$. On a donc bien : $0 < \lambda < 1$. En remplaçant λ par cette expression on obtient : $\forall k \geq 0, P[UV = k] = P[X = k]$.

7. L'égalité des lois et l'indépendance des variables U et V entraînent :

$$E(X) = E(UV) = E(U)E(V) = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(UV) = E(U^2V^2) - E(UV)^2 = E(U^2)E(V^2) - 1 \\ &= E(U)E(V^2) - 1 = \lambda E(V^2) - 1 \quad (U = U^2 \text{ et } E(U) = \lambda) \\ &= \lambda \frac{2-\lambda}{\lambda^2} - 1 = 2\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\text{car } E(V^2) = V(V) + E(V)^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice 4.12.

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On lance indéfiniment une pièce truquée amenant Pile avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On appelle série une succession de Pile ou de Face interrompue par l'événement contraire ; par exemple, dans la suite (Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face) il y a quatre séries successives dont deux séries de Pile de longueur 1 et 3, et deux séries de Face de longueur 2 et 1.

On note L_1 et L_2 les longueurs aléatoires de la première et de la seconde série.

1. Déterminer la loi de L_1 ainsi que son espérance et sa variance (si elles existent).

2. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi marginale de L_2 .

Peut-on déterminer l'espérance de L_2 ?

3. Les variables aléatoires L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Solution :

1. On a $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[L_1 = k]$ est l'événement « lors des $(k+1)$ premiers lancers, on a obtenu k fois Pile suivi d'un Face » ou « k fois Face suivi d'un Pile ». Ainsi :

$$P(L_1 = k) = p^k q + q^k p$$

L'espérance de L_1 existe puisque les séries de la forme $\sum_k kp^{k-1}$ convergent comme dérivées de séries géométriques.

$$E(L_1) = pq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \right) = pq \left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2} \right) = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}$$

Pour calculer la variance, on utilise le moment factoriel d'ordre 2.

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E^2(X)$$

et

$$E(L_1(L_1-1)) = p^2q \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} + pq^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = 2 \left(\frac{q^2}{p^2} + \frac{p^2}{q^2} \right)$$

et $V(L_1) = \frac{q}{p^2} + \frac{p}{q^2} - 2$.

2. Pour $(k_1, k_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'événement $[L_1 = k_1] \cap [L_2 = k_2]$ est l'événement « on a obtenu k_1 fois Pile suivi de k_2 fois Face, puis un Pile » ou « on a obtenu k_1 fois Face suivi de k_2 fois Pile, puis un Face ».

Ainsi :

$$P(L_1 = k_1 \cap L_2 = k_2) = p^{k_1+1}q^{k_2} + q^{k_1+1}p^{k_2}$$

Par définition de la loi marginale, on a :

$$P(L_2 = k_2) = \sum_{k_1=1}^{+\infty} P(L_1 = k_1 \cap L_2 = k_2) = p^2q^{k_2} \frac{1}{1-p} + q^2p^{k_2} \frac{1}{1-q} = p^2q^{k_2-1} + q^2p^{k_2-1}$$

L'espérance de L_2 existe. On reconnaît des sommes de séries classiques. On obtient $E(L_2) = 2$.

3. Supposons L_1 et L_2 indépendantes. Alors :

$$P(L_1 = 1 \cap L_2 = 1) = P(L_1 = 1)P(L_2 = 1) \Rightarrow p^2q + q^2p = 2pq(p^2 + q^2) \Leftrightarrow (2p-1)^2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Donc si $p \neq 1/2$, les variables aléatoires L_1 et L_2 ne sont pas indépendantes.

Supposons $p = 1/2$. Alors :

$$P(L_1 = k_1) = \frac{1}{2^{k_1}} \text{ et } P(L_2 = k_2) = \frac{1}{2^{k_2}} \text{ et } P(L_1 = 1 \cap L_2 = 1) = \frac{1}{2^{k_1+k_2}}$$

et les variables aléatoires L_1 et L_2 sont indépendantes.

Ainsi, L_1 et L_2 sont indépendantes si et seulement si $p = 1/2$.