

# QUESTIONS COURTES

On considère une fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $[0, 1]$  et telle que

$$\forall x \in [0, 1], f''(x) \leq 0$$

Montrer que :  $\int_0^1 f(t)dt \leq f(\frac{1}{2})$ .

On pourra commencer par le cas où  $f'(\frac{1}{2}) = 0$ .

---

Soit  $n$  un entier au moins égal à 1 et  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $n$ . On choisit au hasard deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , toutes les parties, y compris la partie vide, ayant la même probabilité d'être choisies.

Calculer la probabilité de l'événement  $(A \cap B = \emptyset)$ .

---

On considère quatre variables aléatoires réelles  $X, Y, Z, T$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , et la matrice aléatoire  $A$  définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & T(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la probabilité que la matrice  $A$  soit inversible.
  2. Déterminer la probabilité que la matrice  $A$  soit diagonalisable.
- 

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  en posant :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

2. Montrer qu'on ne peut pas trouver  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P, Q \rangle = P(0)$ .

(On pourra utiliser les polynômes  $P_n = \sqrt{n}(1 - X)^{2n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .)

---

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans un segment  $[a, b]$ .

1. Montrer que  $X$  admet une variance et que  $V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ .

2. Peut-on avoir égalité dans l'inégalité précédente ? Pour quelles variables aléatoires ?

---

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $\mathbb{R}^n$  orthogonaux. On suppose que  $p \circ q$  est un projecteur orthogonal.

1. Montrer que  $p \circ q = q \circ p$ .

2. Montrer que les valeurs propres possibles de  $p + q$  sont  $\{0, 1, 2\}$ . Donner un exemple où ces trois nombres sont effectivement valeurs propres de  $p + q$

---

On considère les deux suites réelles  $u$  et  $v$  définies par leurs premiers termes  $u_0$  et  $v_0$  strictement positifs et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n} \text{ et } v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}}(u_{n+1} - u_n)$ .

2. Montrer que les suites  $u$  et  $v$  divergent vers  $+\infty$ .

---

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle  $N$  telle que  $A = N^2$ .

2. Soit  $B$  une matrice symétrique réelle. Montrer que la matrice  $AB$  est diagonalisable.

---

L'équation  $A^2 = A - I_2$ , d'inconnue  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  admet-elle des solutions non diagonalisables ?

---

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que  $u^3 = u^2$ ,  $u \neq Id$ ,  $u^2 \neq 0$ ,  $u^2 \neq u$ .

1. Déterminer les valeurs propres de  $u$ .

2. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

---

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi normale centrée de variance  $\sigma^2 > 0$ , et  $k$  un réel strictement supérieur à 1.

Pour quelle valeur du réel positif  $a$ , la probabilité  $P(a \leq X \leq ka)$  est-elle maximale ?

---

1. Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$  est une fonction de répartition.

2. Déterminer la loi du supremum  $M_n$  de  $n$  variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes de même loi de fonction de répartition  $F$ .

3. Étudier la convergence en loi de la suite  $(M_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .