

QUESTIONS COURTES

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle et vérifiant pour tous x, y réels

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue. On appelle point fixe de f , tout réel x tel que $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.
 2. Montrer que le nombre de points fixes de f est inférieur ou égal à celui de $f \circ f$.
-

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, n[$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

On note Y la partie entière de X et on pose $Z = X - Y$.

Déterminer la loi de Y puis celle de Z .

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de même loi.

On note F la fonction de répartition de X_1 . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

On suppose que les X_n possèdent une densité f nulle sur $] -\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $f(0) > 0$. Montrer que la suite $(nM_n)_{n \geq 1}$ converge en loi.

On lance n fois ($n \geq 2$) une pièce équilibrée et on considère les événements suivants :

$A =$ « on obtient au plus une fois Pile »

$B =$ « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit U, V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Soit a un réel non nul et I_n la matrice identité d'ordre n . On pose

$$M = aI_n + U^t V.$$

1. Déterminer les valeurs propres de M .
 2. La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
-

On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0 sauf à l'intersection de la ligne i et de la colonne j où se trouve un 1.

Soit $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Calculer $(E_{i,i} + E_{i,j})^2$.

En déduire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices de projecteurs.

On note E l'espace vectoriel des applications $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, bornées, de classe C^1 , telles que $f(0) = 0$.

On note \langle , \rangle l'application de E^2 dans \mathbb{R} , définie par

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Soit $n \geq 2$ et f et g deux endomorphismes de \mathbb{R}^n vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

1. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g .
2. En déduire que g est diagonalisable.

